Anlagen
Informationstechnik

Sonderdruck

Luftfahrttechnik
Raumfahrttechnik 14 (1968)
9, Seite 220—221

DK 521.13:517.946.9:518.61

Kurt Nixdorff, Helmut Altmann*)

Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben des eingeschränkten Dreikörperproblems

Übersicht: Untersucht wurde eine Randwertaufgabe des eingeschränkten Dreikörperproblems. Die mit einem Analogrechner ermittelten Bahnen zeigen, daß die betrachtete Randwertaufgabe zwei Lösungen hat. Es gibt auf jeder Seite der Flugbahn mit der kürzesten Flugzeit eine Bahn, in der der Flugkörper in einer vorgeschriebenen Zeit von dem vorgegebenen Ausgangsort zum vorgegebenen Zielort gelangt.

1. Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Das eingeschränkte Dreikörperproblem gilt seit langem als eine der reizvollsten Aufgaben der Mechanik; denn dieses Problem ist eine sehr einfach formulierbare, nichtlineare Aufgabe, für die keine geschlossene Lösung existiert und für die numerische Lösungen nur mit großem Aufwand ermittelt werden konnten, wie z. B. die Untersuchungen von *E. Strömgren* und Mitarbeiter [1] zeigen. Bei dem eingeschränkten Dreikörperproblem handelt es sich um folgende Aufgabe:

Zwei Körper A und B laufen infolge ihrer wechselseitigen Gravitationsanziehung auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt. Ein dritter Körper C, der sogenannte infinitesimale Körper, z. B. ein Satellit oder ein Planetoid, möge sich mit A und B in einer Ebene bewegen. Seine Masse sei so klein, daß er zwar der Gravitationsanziehung von A und B unterliegt, aber selbst deren Bahnen nicht zu stören vermag. Gesucht ist die Bewegung dieses dritten Körpers.

Die Bewegungsgleichungen für dieses Problem lassen sich leicht aufstellen und sind in den meisten Lehrbüchern der Mechanik zu finden (z. B. [2; 3]). *G. W. Hill* untersuchte die durch das Jacobische Integral festgelegten Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeit des infinitesimalen Körpers bei vorgegebenen Anfangsbedingungen und fand die nach ihm benannten Grenzflächen, die der infinitesimale Körper nicht überschreiten kann. Es gibt also Gebiete, die dem infinitesimalen Körper bei entsprechenden Anfangsbedingungen nicht zugänglich sind.

E. Strömgren und Mitarbeiter [1] bestimmten, ebenfalls für vorgegebene Anfangsbedingungen, in jahrzehntelanger Arbeit periodische Bahnen bei gleichen Massen von A und B. Bei neueren Untersuchungen, z. B. von *B. Thüring* [4] sowie von *E. Stiefel* und Mitarbeitern [5], benutzte man elektronische Digitalrechner zum Bestimmen der Bahnen des infinitesimalen Körpers bei vorgegebenen Anfangsbedingungen.

Durch die Veröffentlichung von *E. Stiefel* und Mitarbeitern [5] wurden die Verfasser angeregt zu untersuchen, ob sich nicht mit einfachen Mitteln ein Überblick über die Lösung bei vorgegebenen Randbedingungen ermitteln ließe. Dabei sei als Randbedingungen willkürlich der Ort des infinitesimalen Körpers zu zwei Zeitpunkten vorgegeben und die dazwischen durchlaufene Bahn gesucht.

Für die numerische Rechnung wurden kartesische Relativkoordinaten x und y verwendet. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß in ihm die Körper A und B feste Plätze erhalten und der gemeinsame Massenmittelpunkt von A und B mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt. Der Körper A möge die größere Masse haben und auf der negativen x-Achse liegen. Um die Aufgabe auf praktische Belange auszurichten, wurde angenommen, die infinitesimale Masse C sei etwa ein Satellit, der sich im Schwerefeld von Erde (Körper A) und Mond (Körper B) bewegt, zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten $x = 2 \cdot 10^5$ km, $y = 0$ und zur Zeit $t = 3 \cdot 10^5$ s die Koordinaten $x = -1{,}5 \cdot 10^5$ km, $y = 2{,}5 \cdot 10^5$ km habe. Die Masse des infinitesimalen Körpers geht in die Rechnung nicht ein.

2. Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen lauten (vgl. z. B. [2; 3])

$$\ddot{x} - 2\,\omega\,\dot{y} - \omega^2\,x + \gamma\,\alpha\,\frac{x+a}{r^3} + \gamma\,\beta\,\frac{x-b}{s^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\ddot{y} + 2\,\omega\,\dot{x} - \omega^2\,y + \gamma\,\alpha\,\frac{y}{r^3} + \gamma\,\beta\,\frac{y}{s^3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

*) Die Verfasser danken Herrn Prof. Dr.-Ing. *H. Leipholz*, Universität Karlsruhe, für die Anregung zu dieser Untersuchung und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

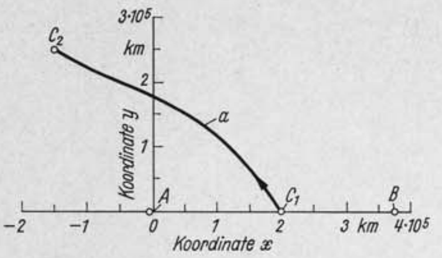

Bild 1. Bahn mit den Anfangs-Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_0 = -0{,}745$ km/s und $\dot{y}_0 = 1{,}105$ km/s in x- bzw. y-Richtung.

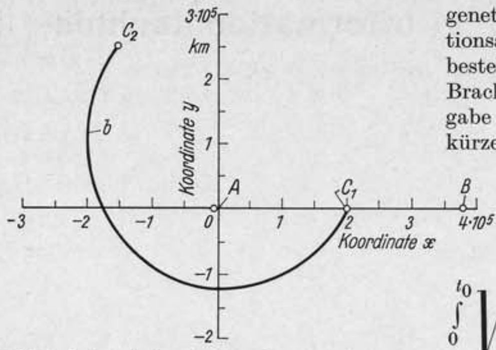

Bild 2. Bahn mit den Anfangs-Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_0 = -1{,}005$ km/s und $\dot{y}_0 = -1{,}95$ km/s in x- bzw. y-Richtung.

Bilder 1 und 2. Bahnen des infinitesimalen Flugkörpers bei gegebenen Randbedingungen im x,y-Relativkoordinatensystem.
A und B auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Massenmittelpunkt umlaufende Himmelskörper; C_1 und C_2 Orte des Infinitesimalkörpers C zu zwei vorgegebenen Zeitpunkten; a und b in Pfeilrichtung durchlaufende Bahn des Infinitesimalkörpers.

mit x und y als den laufenden Ortskoordinaten des Satelliten, r als seinem Abstand von der Erde A, s als seinem Abstand vom Mond B, α als der Masse und $(-a, 0)$ als den Ortskoordinaten von A, β als der Masse und $(b, 0)$ als den Ortskoordinaten von B, γ als der Gravitationskonstante und ω als der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems (A und B haben feste Ortskoordinaten). Punkte über x und y bedeuten Ableitungen nach der Zeit t. Die Winkelgeschwindigkeit ω läßt sich aus γ, α, β und dem Abstand $l = a + b$ zwischen A und B zu

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma\,(\alpha+\beta)}{l^3}} \quad \ldots\ldots (3)$$

bestimmen. Für a und b gilt, da der Koordinatenursprung Massenmittelpunkt ist,

$$a = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, l \quad \ldots\ldots (4)$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, l \quad \ldots\ldots (5).$$

Als Randbedingungen wurden gewählt:

$x\,(t = 0) = 2 \cdot 10^5$ km,

$y\,(t = 0) = 0$,

$x\,(t = 3 \cdot 10^5\ \text{s}) = -1{,}5 \cdot 10^5$ km,

$y\,(t = 3 \cdot 10^5\ \text{s}) = 2{,}5 \cdot 10^5$ km.

3. Ergebnisse

Es bestand die Absicht, für die numerischen Rechnungen eine elektronische Rechenanlage zu benutzen. Da es sich bei den Bewegungsgleichungen des eingeschränkten Dreikörperproblems um nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungen handelt und nur ein Überblick gesucht war, fiel die Wahl auf einen Analogrechner. Der Tischanalogrechner RA 741 der Firma AEG-Telefunken erwies sich bezüglich der Einsatzmöglichkeiten und der Genauigkeit als ausreichend.

Beim Analogrechner lassen sich Parameter besonders leicht ändern. Deshalb wurde durch Variation der Anfangsgeschwindigkeit des infinitesimalen Körpers untersucht, ob die vorstehend formulierte Randwertaufgabe mehrere Lösungen hat. Es wurden zwei Lösungen entsprechend den in *Bild 1* und *2* dargestellten Bahnen gefunden. Die in Abschnitt 2 formulierte Randwertaufgabe hat also keine eindeutige Lösung. Dies überrascht zunächst, ist aber physikalisch verständlich, wie im folgenden erläutert wird. Die gestellte Aufgabe ist monogenetisch und läßt sich daher als Variationsaufgabe schreiben [6]. Insbesondere besteht hier die Möglichkeit, eine dem Brachistochronenproblem analoge Aufgabe anzugeben, d. h. nach der Kurve kürzester Flugzeit zu fragen, die von dem vorgegebenen Anfangspunkt zu dem vorgegebenen Endpunkt führt. Die Bedingung für die Bahn mit kürzester Flugzeit lautet

$$\int_0^{t_0} \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2h + \omega^2 (x^2 + y^2) + 2\,\gamma \left(\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{s}\right)}} \times \mathrm{d}t = \text{Min} \quad \ldots\ldots (6).$$

In Gl. (6) bedeuten t_0 die kürzeste Flugzeit und h die Konstante des für das betrachtete System gültigen Jacobischen Integrals. Die vorgegebene Flugzeit ist etwas länger als die so gefundene kürzeste Flugzeit. Offensichtlich muß es dann bei der untersuchten Aufgabe zwei Bahnen geben, auf jeder Seite der mit der kürzesten Flugzeit durchlaufenen Bahn je eine, die mit der vorgegebenen Flugzeit durchlaufen werden. 732

Schrifttum

[1] *Grammel, R.:* Strömgrens Arbeiten zum Dreikörperproblem. Vierteljahresschrift der Astronom. Ges. **64** (1929), S. 90/100.

[2] *Whittaker, E. T.:* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge 1964. Cambridge University Press. S. 353/55.

[3] *Pars, E. A.:* A Treatise on Analytical Dynamics. London 1965. Heinemann. S. 562/72.

[4] *Thüring, B.:* Bahnberechnung mit elektronischen Rechenmaschinen. Handbuch der Astronautik 1 (1962/63) Nr. 12, S. 379/84 und Nr. 13, S. 385/406.

[5] *Stiefel, E.*, u. a.: Report to NASA on Methods of Regularization for Computer Orbits in Celestial Mechanics. Zürich 1966. Von den Verfassern selbst verlegter Bericht.

[6] *Nixdorff, K.:* Beiträge zur Mathematischen Behandlung und Physikalischen Deutung der Eigenwertaufgaben der Mechanik unter besonderer Berücksichtigung der Knickung verwundener Stäbe. Diss. Universität Karlsruhe 1967.

„Luftfahrttechnik · Raumfahrttechnik" erscheint monatlich (12 Ausgaben im Jahr).
Jahresbezugspreis Inland DM 56,—, Ausland DM 61,20 (einschließlich Mehrwertsteuer und Versandgebühren).